Cohomologie bigraduée de variétés algébriques réelles

Johannes Huisman

On rappellera la notion de faisceaux en groupes abéliens, et leur groupes de cohomologie associés. Ces derniers se généralisent sans difficulté en groupes de cohomologie de complexe de faisceaux, nommés classiquement groupes d'hypercohomologie.

Sur une variété algébrique réelle, i.e. un schéma localement de type fini sur $\mathbf{R}$, on dispose du complexe exponentiel $\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^{\times}$ concentré en degré 0 et 1. Ici, $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des "fonctions holomorphes" sur $X(\mathbf{C})/\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ qui ont un développement en série réelle au-dessus des points réels de X, et $\mathcal{O}^{\times}$ est le faisceau de ces fonctions qui sont inversibles. On note ce complexe par $\mathbf{Z}(1)$, et on note $\mathbf{Z}(q)$ la puissance tensorielle q-ième de ce complexe. L'hypercohomologie bigraduée du titre est alors

$$H^{p,q}(X, \mathbf{Z}(q)) = H^p(X, \mathbf{Z}(q)),$$

le p-ième groupe d'hypercohomologie du complexe $\mathbf{Z}(q)$ sur l'espace topologique X qu'on a identifié avec $X(\mathbf{C})/\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$.

Ces groupes de cohomologie bigraduée ont plusieurs intérêts dont on en traitera 3:

- Ils raffinent la cohomologie galoisienne Borel-Grothendieck de $X(\mathbf{C})$ par rapport à l'action du groupe de Galois de $\mathbf{C}/\mathbf{R}$,
- Ils reçoivent des classes caractéristiques de fibrés vectoriels réels, unifiant ainsi les classes caractéristiques de Chern et celles de Stiefel-Whitney, et
- Les sous-variétés algébriques réelles ont des classes fondamentales dans la cohomologie bigraduée de la variété ambiante, supposée lisse.

Pour l'expliquer, il sera difficile d'échapper à la catégorie dérivée des faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique. On rappellera la notion de catégorie dérivée et ses propriétés.